Límites de funciones.

Los límites de sucesiones nos hablan del comportamiento a largo plazo de las funciones de **N** en **R**.
También podemos pensar en el comportamiento a largo plazo de funciones de **R** en **R**.
Si los valores de la función f: **R** $\to$ **R** cuando x se hace muy grande se aproximan a un valor fijo c, diremos que el **limite** de la función cuando x tiende al infinito es c y escribiremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

Ejemplos. ¿Cuales serán los límites de las siguientes funciones cuando x tiende al infinito?

$\lim_{x\to\infty} x^3-7x^2-8x-4 = \infty$ *cuando x es muy grande, la potencia* x^3 *le gana a todas las otras.*

$\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ *al aumentar* x, *el valor de* $1/x$ *se hace cada vez mas chico y se aproxima cada vez mas a 0*

$\lim_{x\to\infty} x^{-3}-7x^{-2}-8x^{-1}-4 = -4$ *cuando* x *es muy grande, las potencias negativas* x^{-n} *tienden a 0*

$\lim_{x\to\infty} \mathrm{sen}(x) = ?$ *el límite no existe, la función oscila entre* -1 *y* 1 *sin enfocarse a ningún valor*

$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 0$ *al aumentar* x, *el valor de* $\mathrm{sen}(x)$ *oscila entre* -1 *y* 1 *pero como* $1/x$ *se hace cada vez mas chico, las oscilaciones de* $\mathrm{sen}(x)/x$ *son cada vez menores y* $\mathrm{sen}(x)/x$ *se aproxima a 0.*

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-7x^2+4}{3x^3+x^2-5x} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ *si dividimos arriba y abajo por* x^3 *podemos ver que pasa :* $\lim_{x\to\infty} \frac{2-7x^{-1}+4x^{-3}}{3+x^{-1}-5x^{-2}} = \frac{2}{3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-7x^2+4}{3x^3+x^4-5x} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ *si dividimos arriba y abajo por* x^4 *vemos que :* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-1}-7x^{-2}+4x^{-4}}{3x^{-1}+1-5x^{-3}} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-7x^4+4}{3x^3+x^2-5x} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ *si dividimos arriba y abajo por* x^3 *vemos que :* $\lim_{x\to\infty} \frac{2-7x+4x^{-3}}{3+x^{-1}-5x^{-2}} = -\infty$

También podemos preguntarnos cual será será comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a (donde quizás la función no está definida). Si los valores de $f(x)$ se aproximan a un número c, diremos que el límite f cuando x tiende a a es c y escribimos

$$\lim_{x\to\in} f(x) = c$$

Los límites de funciones polinomiales se pueden adivinar fácilmente, y los de funciones racionales también, a menos que el denominador se anule...

Ejemplos.

$\lim_{x\to 21} 2x^3-7x^2+4 = -2-7+4 = -5$

$\lim_{x\to 0} 2x^3-7+4x^{-2} = \infty$ *si x se acerca de 0,* $2x^2$ *-7 se acerca a -7 y* $2x^{-2}$ *toma valores muy grandes positivos)*

$\lim_{x\to 0} 2x^{-3}-7+4x^2$ *no existe* (*si x se acerca de 0,* $-7+4x^2$ *se acerca a -7 pero* $2x^{-3}$ *toma valores muy grandes positivos y negativos)*

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-7x^2+4}{3x^3-2x^2+5x} = \frac{2-7+4}{-3-2+5} = \frac{-1}{6}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{1+1-3}{1-1} = \frac{0}{0}?$ $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$ así que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{4}{3}$

$\lim_{x\to 21} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{1-2-3}{1-1} = \frac{-4}{0}?$ *no existe* (cuando x se acerca de 1 el denominador toma valores muy chicos tanto positivos como negativos, así que el cociente toma valores muy grandes positivos y negativos

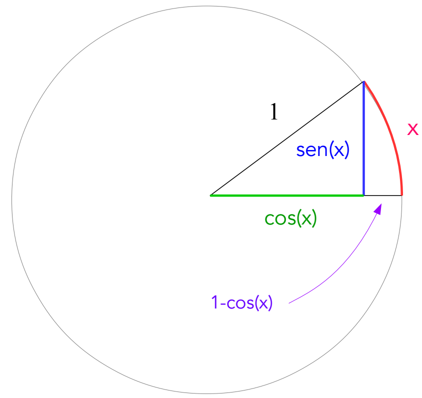
Ejemplo. Algunos límites de funciones trigonométricas se pueden adivinar de las definiciones y del dibujo

$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \tan(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ *porque al hacerse x pequeño sen(x) se parece cada vez mas a x*

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}$ *no existe* *(cuando x>0 se aproxima a ∞ y cuando x<o se aproxima a -∞)*

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ *porque si es x muy pequeño 1-cos(x) es mucho mas chico que x*



Ejercicios.

$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = ?$ $\qquad$ 2 ya que $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{1} \to \frac{1+1}{1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = ?$ $\qquad$ *no existe: como el numerador se acerca a 1 y el denominador se acerca a 0 con valores positivos y negativos, el cociente toma valores positivos y negativos cada vez mas grandes*

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = ?$ $\qquad$ 1 ya que $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1\cdot 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1/2$ $\qquad$ 1/2 ya que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\frac{1}{(1+\cos(x))} \to 1^2\frac{1}{1+1}$

Ahora vamos a hablar de límites con mas cuidado. Supongamos que tenemos una función $f(x)$ definida para los valores de x cercanos a a, aunque quizás no esté definida en a.
Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el número c, si dado cualquier numero real positivo ε, existe un número real positivo δ tal que si x dista de a menos que δ entonces $f(x)$ dista de c menos que ε .
En corto:

$$\lim_{x\to\in} f(x) = c \text{ si } \forall\varepsilon > 0, \exists\delta>0 \text{ tal que si } |x-a|<\delta \text{ entonces } |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Ejemplos.

- $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$. Para demostrarlo tenemos que ver que si $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que si $|x-0|<\delta$ entonces $|x^3-0|<\varepsilon$, es decir que si $|x|<\delta$ entonces $|x^3|<\varepsilon$. Como $|x^3|$ es la cubo de $|x|$, para que $|x^3|<\varepsilon$ basta que $|x|<^3\varepsilon$.
  Si $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ y $|x-0|<\delta$ entonces $|x|<\sqrt[3]{\varepsilon}$ así que $|x^3|<|\sqrt[3]{\varepsilon}|^3= \varepsilon$

- $\lim_{x\to 2} 3x+1= 7$. Para demostrarlo tenemos que ver que si $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que si $|x-2|<\delta$ entonces $|3x+1-7|<\varepsilon$.
  Y para esto necesitamos ver que relación hay entre las cantidades $|x-2|$ y $|3x+1-7|$.
  Como $|3x+1-7|=|3x-6|=3|x-2|$, la segunda cantidad es el triple de la primera, así que si para que $3|x-2|< \varepsilon$ basta que $|x-2|< \varepsilon/3$.
  Si $\delta=\varepsilon/3$ y $|x-2|<\delta$ entonces $|x-2|< \varepsilon/3$ y $|3x+1-7|=3|x-2| < 3\ \varepsilon/3 = \varepsilon$.

- $\lim_{x\to 3} x^2= 9$. Para demostrarlo tenemos que ver que si $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que si $|x-2|<\delta$ entonces $|x^2-9|<\varepsilon$.
  Veamos que relación hay entre las cantidades $|x-3|$ y $|x^2-9|$. Como $|x^2-9|=|x+3||x-3|$ entonces $|x^2-9|$ es $|x+3|$ veces $|x-3|$ y si x está cerca de 3 entonces $|x+3|$ se parece a 6, así que $|x^2-9|$ es como 6 veces $|x-3|$ y para que $|x^2-9|<\varepsilon$ necesitaríamos que $|x-3|<\varepsilon/6$, pero esto no es suficiente porque $|x+3|$ puede ser mayor que 6 aunque x esté muy cerca de 3.
- Pero si $|x-3|<1$, entonces $|x+3|<1+6=7$ así que para x cercana a 3 si sabemos que $|x^2-9|<7|x-3|$
  Si $\delta=\min\{1,\varepsilon/7\}$ y $|x-3|<\delta$ entonces $|x-3|<1$ así que $|x+3|<7$ y $|x-3|< \varepsilon/7$ por lo tanto $|x^2-9|=|x+3||x-3| <7\varepsilon/7= \varepsilon$.

Ejemplo. $\lim_{x\to 4} 1/x = 1/4$. Para demostrarlo tenemos que ver que si $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que si $|x-4|<\delta$ entonces $|1/x-1/4|<\varepsilon$.

Para esto hay que comparar las dos cantidades. $|1/x-\ 1/4| = \frac{4-x}{4x} = \frac{|x-4|}{4|x|}$ así que si x es cercana a 4 entonces $4|x|$ es cercano a 16 y $|1/x-\ 1/4|$ se parece a $1/16|x-4|$ por lo que δ debería ser algo cercano a 16ε.

Si $|x-4|<1$ entonces $|x|>3$ así que $\frac{|x-4|}{4|x|} < \frac{|x-4|}{12}$ y entonces $|1/x-\ 1/4| < \frac{|x-4|}{12}$ por lo que basta tomar $\delta = \min\{1,12\varepsilon\}$.

En los ejemplos anteriores encontramos δ explícitamente en términos de ε para entender como funciona la definición: δ depende no solo de ε, sino de $f(x)$ y también de a. Hallar δ así es difícil para funciones mas complicadas, pero en general no hace falta, porque solo necesitamos saber que existe, no cuanto vale.

Lema. Sean f y g funciones definidas en una vecindad de un punto a. Si $\lim_{x\to a} f(x)=c$ y $\lim_{x\to a} g(x)=d$ entonces:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=c+d$
2. $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=c\cdot d$
3. $\lim_{x\to a}(1/g)(x)=1/d$ si $d\neq 0$.
4. $\lim_{x\to a}(f/g)(x)=c/d$ si $d\neq 0$.

Demostración. Es casi igual que para límites de sucesiones.

1. Para ver que $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=c+d$ observar que $|(f+g)(x)-(c+d)| = |f(x)-c+g(x)-d| \le |f(x)-c|+|g(x)-d|$

Si $\lim_{x\to a} f(x)=c$ y $\lim_{x\to a} g(x)=d$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-c|<{}^{\varepsilon}/_{2}$ y $|g(x)-d|<{}^{\varepsilon}/_{2}$.

Si $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ entonces $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-c+g(x)-d| \le |f(x)-c|+|g(x)-d| < {}^{\varepsilon}/_{2}+ {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$

2. Para ver que $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=c\cdot d$ veamos primero el caso fácil:

Si $c=0$ entonces $|f(x)\cdot g(x) - c\cdot d| = |f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)|$

Como $\lim_{x\to a} g(x)=d$ entonces existe $\delta_1>0$ tal que $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-d|<1$ y por lo tanto $|g(x)|<|d|+1$

y como $\lim_{x\to a} f(x)=c$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2>0$ tal que $|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-c| < {}^{\varepsilon}/_{|d|+1}$

Si $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ entonces $|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)|<|d|+1$ y $|f(x)-c| < {}^{\varepsilon}/_{|d|+1}$ por lo tanto $|f(x)\cdot g(x)| < {}^{\varepsilon}/_{|d|+1}\,(|d|+1) = \varepsilon$.

Si $d=0$ el argumento es el mismo.

Para $d\neq 0$ observar que $|(f\cdot g)(x)-(c\cdot d)|= |f(x)\cdot g(x)-c\cdot d| =$

$$= | f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot d +f(x)\cdot d - c\cdot d | = | f(x)\cdot(g(x)-d) + (f(x)-c)\cdot d |$$
$$\le |f(x)|\cdot|g(x)-d| + |f(x)-c)|\cdot|d|$$

Necesitamos ver que cuando $|x-a|$ es pequeño estos productos son pequeños. Para esto necesitamos acotar los factores.

Como $\lim_{x\to a} f(x)=c$ y $d\neq 0$ entonces existe $\delta_1>0$ tal que $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-c| < {}^{\varepsilon}/_{2|d|}$ y por lo tanto $|f(x)-c)|\cdot|d|< {}^{\varepsilon}/_{2|d|}\,|d| = {}^{\varepsilon}/_{2}$

Como $\lim_{x\to a} f(x)=c$ entonces existe $\delta_2>0$ tal que $|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-c| < 1$ y por lo tanto $|f(x)| <|c|+1$.

Y como $\lim_{x\to a} g(x)=d$ entonces existe $\delta_3>0$ tal que $|x-a|<\delta_3 \Rightarrow |g(x)-d| < {}^{\varepsilon}/_{2|c|+1}$

Si $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ entonces $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-c| < {}^{\varepsilon}/_{2|d|}$, $|f(x)|<|c|+1$ Φ $|g(x)-d| < {}^{\varepsilon}/_{2(|c|+1)}$

por lo tanto $|(f\cdot g)(x)-c\cdot d| \le |f(x)|\cdot|g(x)-d| + |f(x)-c)|\cdot|d| < {}^{\varepsilon}/_{2(|c|+1}(|c|+1)+ {}^{\varepsilon}/_{2|d|}(2|d|) = {}^{\varepsilon}/_{2}+{}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$.

3. Para ver que $\lim_{x\to a}(1/g)(x)=1/d$ cuando $d\neq 0$ observar que $|1/g(x) - 1/d | = |d-g(x)/g(x)\cdot d| = \frac{|d - g(x)|}{|g(x)\cdot d|}$

Como $\lim_{x\to a} g(x)=d$ y $|d|>0$ entonces existe $\delta_1>0$ tal que $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-d|<|d/2|$ y por lo tanto $|g(x)|>|d/2|$

Y como $\lim_{x\to a} g(x)=d$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2>0$ tal que $|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-d| < {}^{\varepsilon}/_{d^2}$

Si $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ entonces $|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)|>|d/2|$ y $|g(x)-d| < {}^{\varepsilon}/_{d^2}$ por lo tanto $|1/g(x)| = \frac{|d - g(x)|}{|g(x)\cdot d|} < \frac{\varepsilon/d^2}{|d/2||d|} = {}^{\varepsilon}/_{2} < \varepsilon$.

4. Es consecuencia directa de 3 y 4. •

Corolario. Si f es cualquier función polinomial o racional que esté definida en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Demostración. El resultado es inmediato para la función identidad $i(x)=x$ y para las funciones constantes $c(x)=c$ ya que para $i(x)=x$ basta tomar $\delta=\varepsilon$, y para $c(x)=c$ cualquier δ sirve para toda $\varepsilon > 0$. El resultado se cumple para todas las otras funciones polinomiales porque se obtienen sumando y multiplicando a esas dos. Las funciones racionales se obtienen dividiendo funciones polinomiales, y están definidas cuando el denominador no se anula. •

Problemas.

1. Calcula los siguientes límites o muestra que no existen

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3+x-2x^2-x^3}{6x+5x^2+4x^3}$

b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

c. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

d. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}$

f. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2}$

g. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(x)}$

h. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{1-\cos(x)}$

i. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$

j. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(1/x)$

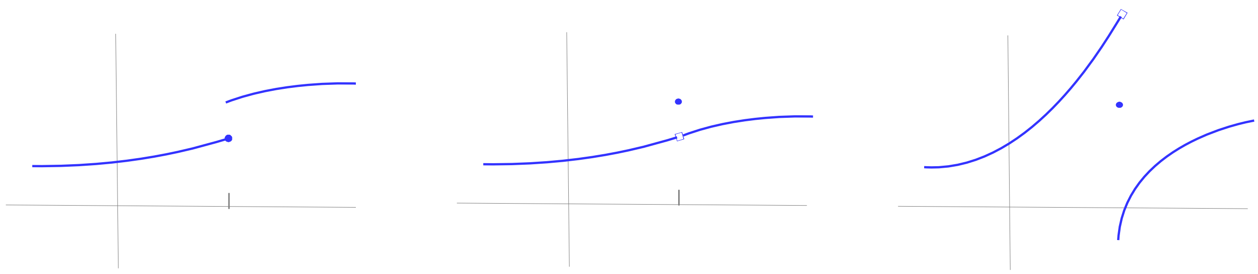
2. Demuestra usando ε y δ que
   a. $\lim_{x\to 3} 5-4x = -7$
   b. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$
   c. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$

3. Da ejemplos de polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que $\lim_{x\to\in} p(x) = 0$ y $\lim_{x\to\in} q(x) = 0$
   a. $\lim_{x\to\in} p(x)/q(x) = -1$
   b. $\lim_{x\to\in} p(x)/q(x) = 0$
   c. $\lim_{x\to\in} p(x)/q(x) = \infty$
   d. $\lim_{x\to\in} p(x)/q(x)$ *no exista*

Funciones continuas

Cuando una cantidad variable y depende de otra cantidad variable x, es natural esperar que a un cambio muy pequeño en x le corresponda un cambio relativamente pequeño en y. Si esto ocurre decimos que y *depende continuamente* de x.

Intuitivamente, una función $y=f(x)$ es *continua* si a valores cercanos de x le asigna valores relativamente cercanos de y. Las gráfica de funciones continuas f no tienen brincos como estos:



Varios tipos de discontinuidades

Formalmente, la función f es **continua** en un punto a de su dominio si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Se sigue de la definición de límite que f es continua en a si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.
Si f no es continua en a diremos que es *discontinua* en a.

Ejemplos.

- La función identidad $i(x)=x$ es continua en todos los reales: para cualquier valor de a y para cualquier ε basta tomar $\delta=\varepsilon$.
- Las funciones polinomiales $p(x)$ son continuas en todos los reales, porque ya mostramos que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$. aunque puede ser difícil encontrar δ en términos de ε.
- Las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son continuas. Esto es intuitivamente claro de su definición geométrica, aunque no lo hemos demostrado.
- La función $\operatorname{sen}(x)/x$ no está definida en $x=0$, pero como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$, si la definimos como 1 en $x=0$ obtenemos una función que está definida y es continua en todos los números reales.
- La parte entera $e(x)=\lfloor x\rfloor$ es discontinua en los enteros, pero es continua en todos los reales que no son enteros

En la definición de continuidad con ε y δ el valor de δ depende de ε, de la función f y del valor de a.

Ejemplo. La función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es continua en 0, veamos como varia δ al variar ε cuando $a=0$.
Como $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x-0|}$ entonces basta tomar $\delta = \varepsilon^3$.
Así que para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1$ basta que $|x-0|<1^3=1$
Para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1/10$ hace falta que $|x-0|< 1/10^3 = 1/1000$
Y para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1/100$ se necesita que $|x-0| < 1/100^3 = 1/1{,}000{,}000$

Ejemplo. La función $f(x)=x^3$ es continua en cada $a\in\mathbf{R}$, así que dado $\varepsilon>0$ debe existir $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|x^3-a^3|<\varepsilon$
Veamos como varía δ para el mismo valor de ε al variar a.

¿Que tan chico debe ser $|x-0|$ para que $|x^3 - 0^3| < 1/100$?

Si $|x|<\delta$ entonces $|x^3| < \delta^3$ así que basta tomar $\delta < \sqrt[3]{1/100}$, digamos $\delta = 1/5$

¿Que tan chico debe ser $|x-1|$ para que $|x^3 - 1^3| < 1/100$?

No basta tomar $\delta = 1/5$ ya que $(1+1/5)^3 - 1^3 = 216/125 - 1 = 91/125 = 0.728 >> 1/100$

No basta tomar $\delta = 1/50$ ya que $(1+1/50)^3 - 1^3 = 132651/125000 - 1 = 7151/125000 \approx 0.0572 > 1/100$

Pero sí basta tomar $\delta = 1/400$ ya que $(1+1/400)^3 - 1^3 \approx 0.007519 < 1/100$

¿Que tan chico debe ser $|x-100|$ para que $|x^3 - 100^3| < 1/100$?

No basta tomar $\delta = 1/400$ ya que $(100+1/400)^3 - 100^3 \approx 75.0019 >> 1/100$

No basta tomar $\delta = 1/10{,}000$ ya que $(100+1/10{,}000)^3 - 100^3 \approx 3 >> 1/100$

No basta tomar $\delta = 1/1{,}000{,}000$ ya que $(100+1/1{,}000{,}00)^3 - 100^3 \approx 0.03 > 1/100$

Pero basta tomar $\delta = 1/10{,}000{,}000$ ya que $(100+1/10{,}000{,}00)^3 - 100^3 \approx 0.006 < 1/100$

Ejemplo. La función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es continua en 0, veamos como varia δ al variar ε cuando $a=0$.

Como $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x-0|}$ entonces basta tomar $\delta = \varepsilon^3$.

Así que para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1$ basta que $|x-0| < 1^3 = 1$

Para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1/10$ hace falta que $|x-0| < 1/10^3 = 1/1000$

Y para que $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| < 1/100$ se necesita que $|x-0| < 1/100^3 = 1/1{,}000{,}000$

Teorema. Si f y g son funciones continuas entonces $f+g$ y $f\cdot g$ son funciones continuas, y f/g es continua en todos los puntos donde $g\neq 0$.

Demostración. Si f y g son continuas en a entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.
Ya demostramos que entonces $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = f(a)+g(a)$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = f(a)\cdot g(a)$ y que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = f(a)/g(a)$ si $g(a)\neq 0$ y esto dice que $f+g$ y $f\cdot g$ son continuas en a y que f/g es continua en a si $g(a)\neq 0$. •

Ejemplo. Las funciones racionales son continuas en todos los puntos donde están definidas ya que son cocientes de polinomios, que son funciones continuas.

Teorema. Si f y g son funciones continuas entonces la composición $g\circ f$ es continua en todos los puntos donde está definida.

Demostración. Supongamos que f es una función continua en a y que g es una función continua en $b=f(a)$.
Como g es continua en b, dada $\varepsilon>0$, existe $\eta>0$ tal que si $|y-b|<\eta$ entonces $|g(y)-g(b)| < \varepsilon$.
Como f es continua en a, dada $\eta>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)| < \eta$.
Así que si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)| < \eta$, así que $|f(x)-b| < \eta$ y por lo tanto $|g(f(x))-g(b)| < \varepsilon$ así que $|g(f(x))-g(f(a))| < \varepsilon$. •

Ejemplo. La funciones $f(x)=\cos^7(x)-2\cos^5(x)+7\cos^3(x)$ y $g(x)=\cos(x^7-2x^5+7x^3)$ son continuas porque son composiciones de $c(x)=\cos(x)$ y $p(x)=x^7-2x^5+7x^3$ que son continuas.

Lema. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es una función continua y $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo (digamos $f(a)<0$ y $f(b)>0$) entonces existe un número real c en $[a,b]$ donde $f(c)=0$.

Demostración. Sea $N = \{ x \in [a,b] / f(x)<0 \}$ entonces N es un conjunto acotado (por b) y N es no vacío (porque a está en N) y por lo tanto N tiene un supremo. Sea $c=\sup N$. Afirmamos que $f(c)=0$. Si $f(c)\neq 0$. entonces $f(c)<0$ o $f(c)>0$.
Como f es continua en c, si $f(c)<0$ entonces $f(x)<0$ para todos los x cercanos a c, así que hay valores de x mayores que c donde $f(x)<0$ y esto diría que c no es cota superior de N.
Y como f es continua en c, si $f(c)>0$ entonces $f(x)>0$ para todos los x cercanos a c, pero esto dice que ninguno de esos puntos está en N, por lo que c no puede ser el supremos de N. •

Corolario. Cada polinomio $p(x)$ de grado impar tiene al menos una raíz (existe una c tal que $p(c)=0$.

Demostración. Como los polinomios son funciones continuas en todo **R**, por el lema anterior basta ver que los polinomios de grado impar toman valores positivos y negativos. Esto es así porque cuando $|x|$ es my grande el polinomio tiene el mismo signo que el término de grado mayor, y si el grado del polinomio es impar el signo de este término es distino cuando x es positivo y cuando x es negativo. •

Ejemplo. Consideremos el polinomio $p(x) = x^5-2x^4-3x^3-4x^2-5x+6$. Si tabulamos algunos valores de p(x)

x	p(x)
-2	-40
-1	7
0	6
1	-7
2	-45
3	-45

vemos que $p(x)$ cambia de signo entre $x=-2$ y $x=-1$ y también entre $x=0$ y $x=1$ así que $p(x)$ debe tener raíces entre esos números. Y $p(x)$ debe cambiar de signo otra vez después de $x=3$ porque si x es muy grande $p(x)$ debe parecerse a x^5 y por lo tanto $p(x)$ debe ser positivo.
Así que $p(x)$ debe tener otra raíz entre 3 y ∞.

Teorema del valor intermedio. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es continua, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración. Si v es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(c)$ podemos considerar la función $g(x)=f(x)-v$. Como $f(x)$ es continua entonces $g(x)$ es continua, y como $g(a)$ y $g(b)$ tienen distinto signo el lema anterior dice que $g(c)=0$ por lo tanto $f(c)=v$. •

Corolario. Si f es una función continua en un intervalo (posiblemente infinito) entonces la imagen de f es otro intervalo (posiblemente infinito).

Demostración. ???

Recordar que una función $f : A \to B$ es *invertible* si existe otra función $g : B \to A$ tal que $g\circ f = id_A$ y $f\circ g = Id_B$ y en este caso decimos que g es la *inversa* de f. Para que f sea invertible es necesario que f sea inyectiva y suprayectiva.

Corolario. Si una función continua f manda un intervalo A a un intervalo B y f tiene inversa, entonces la inversa también es continua.

Demostración. ???

Teorema. Si $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ es una función continua, entonces f toma un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo, es decir, existen c,d en $[a,b]$ tales que $f(c)\geq f(x)$ y $f(d)\leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

Demostración.
Paso 1. Veamos primero que f está acotada en el intervalo $[a,b]$, es decir, que existen dos números r y s tales que $r\leq f(x)\leq s$ para todo $x\in[a,b]$.
Si f no estuviera acotada superiormente, existiría una sucesión de puntos r_n en $[a,b]$ tales que $f(r_n)>n$ para cada n. Por el un lema anterior, la sucesión debe tener una subsucesión que converge a algún punto r en $[a,b]$.
Como f es continua en r, $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$, pero la subsucesión de r_n converge a r y los valores de $f(r_n)$ no se acercan a $f(r)$ porque tienden a $\approx$. Esta contradicción muestra que f debe estar acotada superiormente.y un argumento similar muestra que f también debe estar acotada inferiormente.

Paso 2. Veamos ahora que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo $[a,b]$.
Sea V el conjunto de valores de f en el intervalo, es decir $V = \{ f(x) / x \in [a,b] \}$. Entonces V es un conjunto no vacío y V está acotado, así que V tiene supremo e ínfimo, que llamaremos s y i.
Afirmamos que s es el máximo de f, es decir, que existe un c en $[a,b]$ tal que $f(c)=s$
Como $s = \sup V$ existen elementos de V arbitrariamente cercanos a s, así que existe una sucesión de puntos c_n en $[a,b]$ tales que $f(c_n)>s-1/n$ para cada n. Por un lema anterior, la sucesión c_n tiene una subsucesión convergente a un punto c en $[a,b]$ y como f es continua en c, $\lim_{x\to c} f(c_n) = f(c)$ pero $\lim_{x\to c} f(c_n) = s$, así que $f(c)=s$.
Un argumento similar muestra que $i=\inf V$ es el mínimo de f. •

Ejemplo. ¿Como cuales serán los valores máximo y mínimo de la función $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+1$ en el intervalo $[0,2]$?

Problemas.

4. a. ¿A que distancia debe estar x de 1 para que la distancia de x^4 a 1^4 sea menor que 1?
   b. ¿A que distancia debe estar x de 10 para que la distancia de x^4 a 10^4 sea menor que 1?
   c. ¿A que distancia debe estar x de 100 para que la distancia de x^4 a 100^4 sea menor que $1/10$?

5. Demuestra que la función $\sqrt{x}$ es continua en todos los reales positivos, viendo que para cada a y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon$.

6. Muestra que existe un número real x tal que $x^3+x^2+x=2$ y da el valor de x con un error menor que 0.1.

7. a. Demuestra que cada polinomio de grado impar toma todos los valores reales.
   b. Demuestra que ningún polinomio de grado par toma todos los valores reales.

8. Demuestra que para cada función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x)=x$.

9.* Muestra que si $d(x)= \begin{cases} 1/q & \text{si } x=p/q \text{ como fracción reducida} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

   entonces $d(x)$ es continua en todos los irracionales pero es discontinua en todos los racionales.